Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Расчетное задание по курсу

**«Основы вычислительной гидрогазодинамики»**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Выполнил |  |  |
| студент гр. 5030301/00102 | Кучиев Д.Ю. | /\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/ |
| Преподаватель | Булович С. В.  Колесник Е. В. | /\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/  /\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/  «\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 202\_\_ г. |

Санкт-Петербург

2023

Оглавление

[**Введение** 2](#_Toc153730552)

[**1. Решение задачи об обтекании пластины** 2](#_Toc153730553)

[**1.1 Описание математической модели** 3](#_Toc153730554)

[**Уравнения Прандтля** 3](#_Toc153730555)

[**Уравнения Навье-Стокса** 3](#_Toc153730556)

[**1.2 Описание численных методов** 4](#_Toc153730557)

[**Уравнения Прандтля** 4](#_Toc153730558)

[**Уравнения Навье-Стокса** 6](#_Toc153730559)

[**1.3 Анализ результатов** 8](#_Toc153730560)

[**Обтекание пластины** 8](#_Toc153730561)

[**2. Индивидуальный вариант задания** 12](#_Toc153730562)

[**2.1 Описание математической модели** 13](#_Toc153730563)

[**2.2 Описание численных методов** 14](#_Toc153730564)

[**2.3 Анализ результатов** 15](#_Toc153730565)

[**3 Вывод** 20](#_Toc153730566)

**Введение**

В данной работе решены две задачи с различной постановкой: течение несжимаемой жидкости при обтекании пластины, а также течение сжимаемого газа с переменной вязкостью в начальном участке канала.

Для выполнения первой части работы были разработаны программы для решения двух наборов уравнений Прандтля и Навье-Стокса для описания течения при обтекании пластины. Программы написаны на языке Fortran. Одна из программ реализует расчет двумерного течения несжимаемой жидкости с использованием модели описания физического процесса, называемой приближение пограничного слоя (решение уравнений Прандтля). Вторая программа реализует другую модель описания физического процесса – решение полных уравнений Навье-Стокса. Коды программ представлены в удаленном репозитории GitHub [1].

В первой программе при реализации численного метода использована неявная схема по маршевой координате. С целью валидации полученное решение сопоставлено с известным аналитическим решением (формула Блазиуса для коэффициента трения).

Во второй программе для расчета использовать метод искусственной сжимаемости в рамках явного метода установления по псевдовремени. Валидация производилась путем сравнения полученных результатов с результатами первой программы при одинаковых входных параметрах.

Для выполнения второй части работы была модифицирована программа для решения уравнений Новье-Стокса для пограничного слоя, с добавлением дополнительных слагаемых. Добавлен учет сжимаемости среды и переменной вязкости. Код программы также представлен в удаленном репозитории GitHub [1].

**1. Решение задачи об обтекании пластины**

Рассмотрим двумерную задачу о развитии пограничного слоя на плоской пластине длиной с однородным набегающим потоком и высотой расчетной области для несжимаемой жидкости.

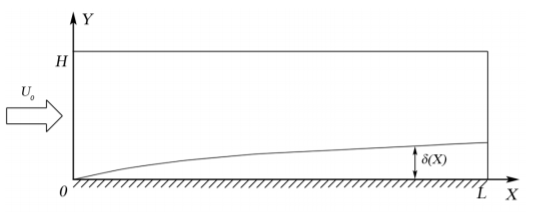


Рисунок . Расчетная область

**1.1 Описание математической модели**

**Уравнения Прандтля**

Система уравнений Прандтля в случае несжимаемой среды записываются следующим образом:

где



Так как поток внешней жидкости, вне пограничного слоя, можно описать как движение идеальной жидкости, следует следующее соотношение для градиента давления:

При будем иметь:

Тогда уравнения, которые нам предстоит решать вместе с граничными условиями прилипания на нижней стенке и начальным условием в виде профиля скорости в начальном сечении, запишутся следующим образом:

**Уравнения Навье-Стокса**

Система уравнений Навье-Стокса в случае несжимаемой среды записывается следующим образом:

В данном случае граничные условия будут иметь следующий вид:

**1.2 Описание численных методов**

**Уравнения Прандтля**

Данная задача описывается системой:

Запишем аппроксимацию уравнения движения для несжимаемой жидкости. В конечноразностном виде оно преобразуется в вид:

Аппроксимация осуществляется на основе неявной схемы по маршевой координате:

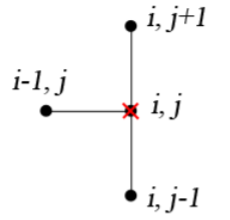


Рисунок . Шаблон аппроксимации уравнения движения

Так как продольная компонента скорости стоит в данном уравнении в некоторых слагаемых в квадрате, мы должны применить метод запаздывающих коэффициентов, и создать итерационный процесс по , тогда уравнение примет следующий вид:

Приведем уравнение к виду:

Теперь можно применить метод прогонки. Коэффициенты прогонки для граничных условий примут следующий вид:

Далее рассмотрим аппроксимацию уравнения неразрывности:

Преобразуем данное уравнение, учитывая шаблон аппроксимации, то есть необходимо найти среднее между двумя продольными компонентами скорости на соседних слоях, а также учесть одну компоненту поперечной скорости. Получаем:

При этом определяется в соответствии с ГУ:

Аппроксимация осуществляется на основе четырехточечного шаблона:

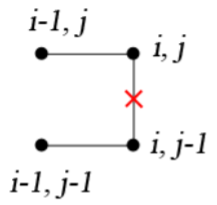


Рисунок . Шаблон аппроксимации уравнения неразрывности

**Уравнения Навье-Стокса**

Данная задача описывается системой:

Данная стационарная задача будет решаться методом искусственной сжимаемости в рамках явного метода установления по псевдовремени, для этого введем итерационное время и параметр искусственной сжимаемости уравнения примут следующий вид:

На рисунке 4 представлена схема дискретизации расчетной области, переменные хранятся в центрах ячеек.

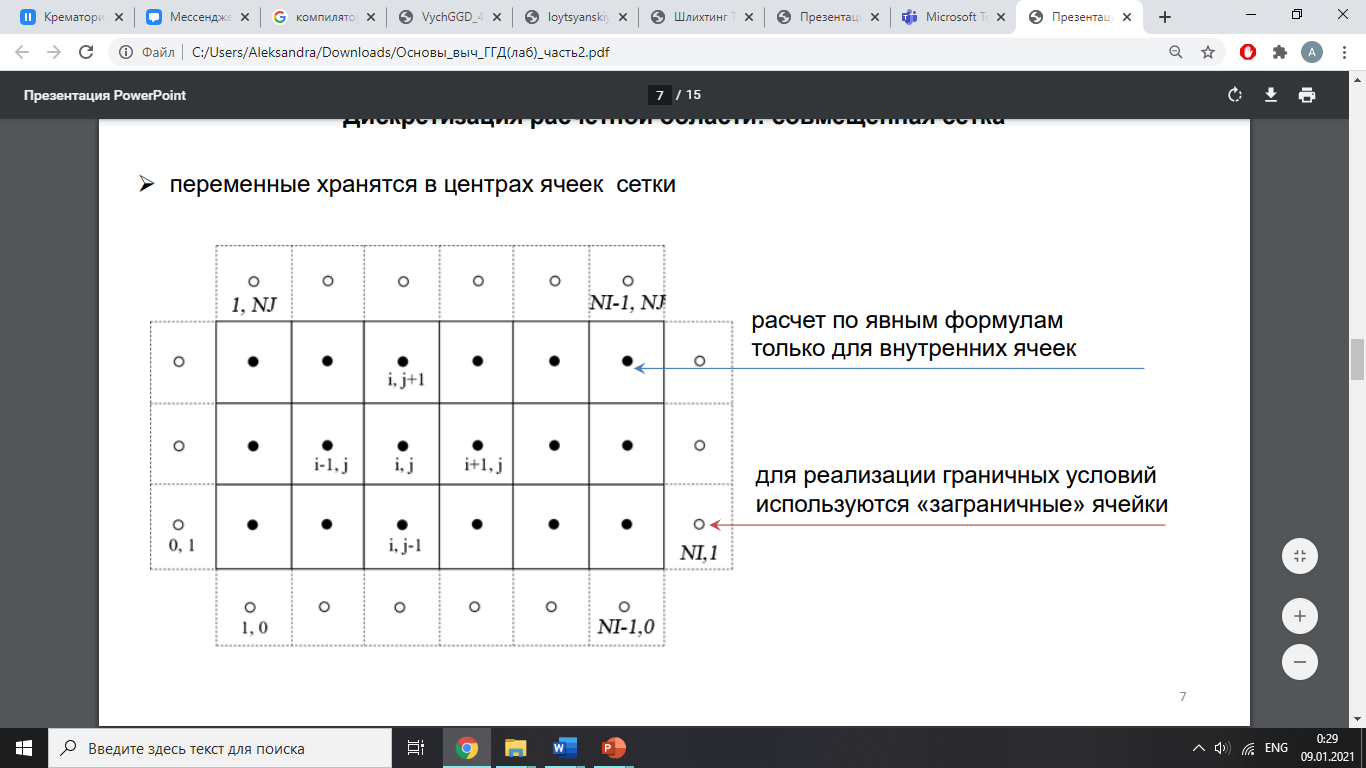


Рисунок . Дискретизация расчетной области

Сначала рассчитываются значения компонент скорости переноса и значения скоростей потока и давлений на границах ячеек. Пример расчета:

Тогда:

Стоит заметить, что для компонент скорости используются разности «против потока», для давления – разности «по потоку».

Аппроксимация уравнения неразрывности будет выглядеть следующим образом:

Из данного уравнения по явной схема определяется давление. Далее можно найти компоненты скорости.

Аппроксимация уравнения количества движения в проекции на ось x:

Аппроксимация уравнения количества движения в проекции на ось y:

Граничные условия представляются в следующем виде:

На непроницаемой стенке задается условие прилипания и нулевого градиента давления:

На входной границе задается скорость потока и так же нулевой градиент давления:

На выходных, верхней и правой границе, задается условие нулевых градиентов скорости и нулевое давление:

**1.3 Анализ результатов**

**Обтекание пластины**

Задача об обтекании пластины решалась при следующих параметрах:

Таблица Входные параметры

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0.2 | 1 | 1 | 1000 |  | 101 | 101 | 0.1 |

Поля продольной и поперечной компоненты скорости, полученные при численном решении уравнений Прандтля и уравнений Навье-Стокса, представлены на рисунках ниже:

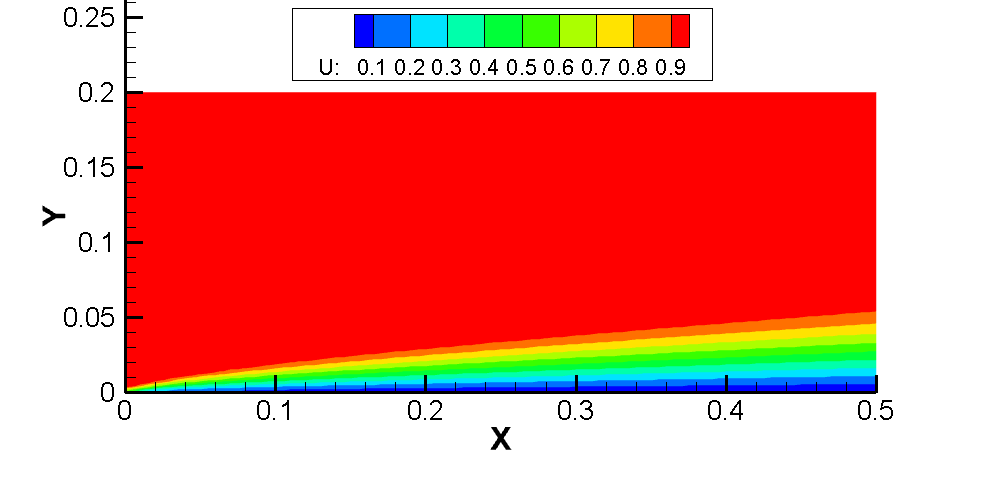
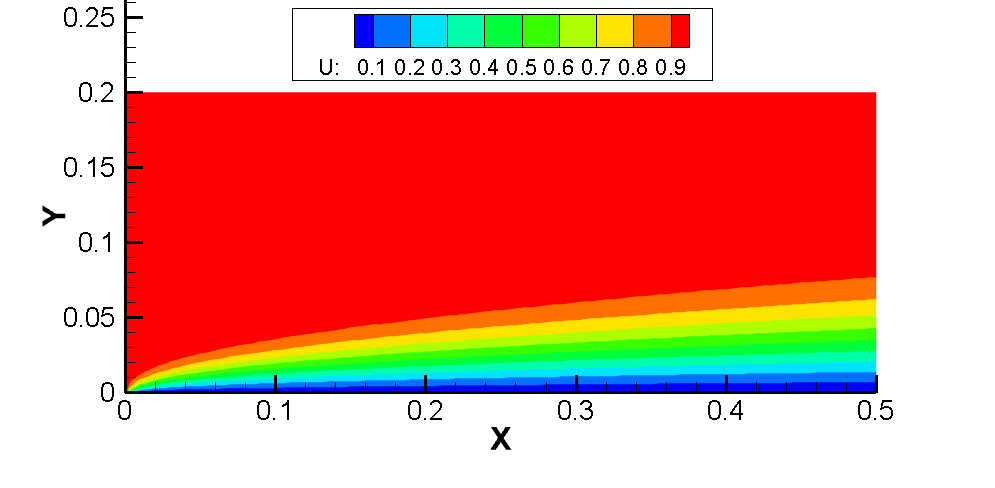


Рисунок . Поля продольной компоненты скорости. Уравнения Прандтля(слева). Уравнения Навье-Стокса(справа)

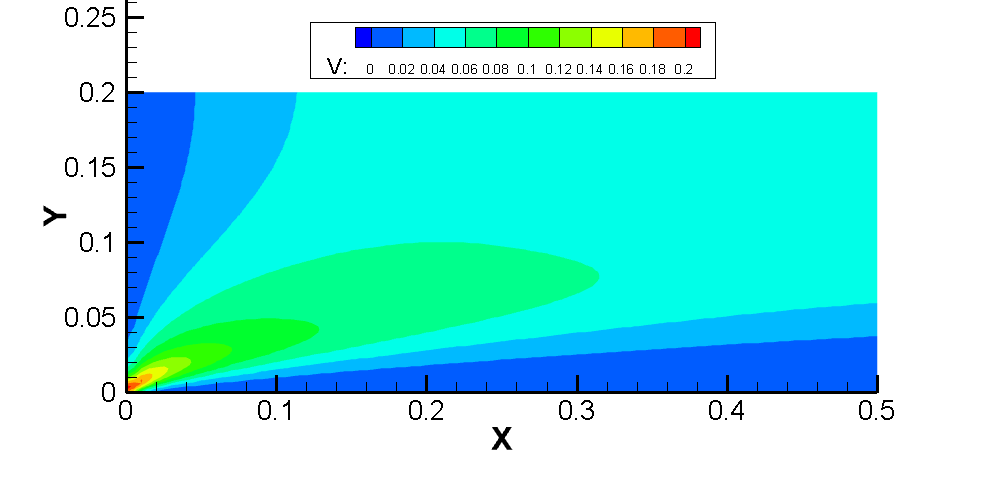
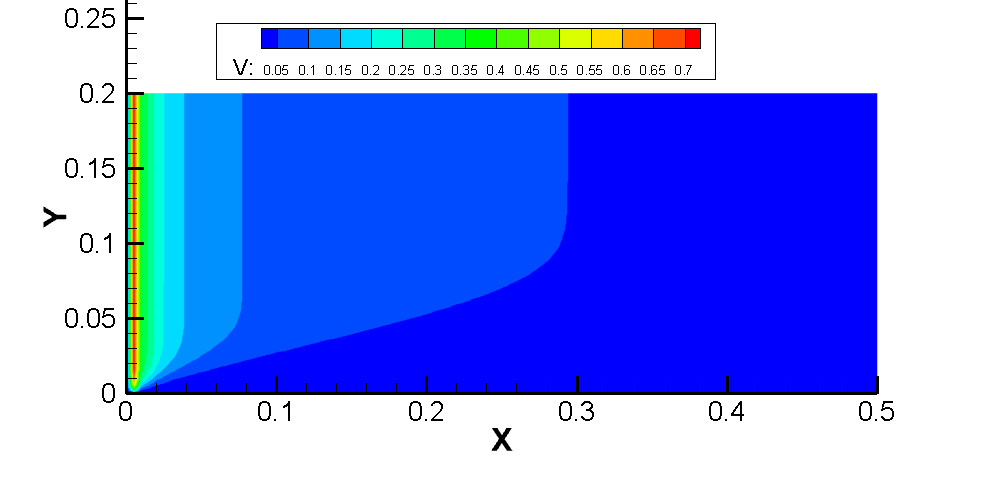


Рисунок . Поля поперечной компоненты скорости. Уравнения Прандтля(слева). Уравнения Навье-Стокса(справа)

На представленных выше полях (рисунки 5, 6) видно образование погранично слоя, из-за образования которого появляется поперечное течение, так как течение вдоль поверхности происходит с замедлением.

Из рисунка 5 видно, что толщина пограничного слоя возрастает быстрее для уравнений Прандтля, также различаются максимальные значения продольной компоненты скорости.

Из рисунка 6 видно, что поперечная скорость в случае уравнений Прандтля имеет свой максимум по левому краю расчетной области, а в случае уравнений Навье-Стокса максимум наблюдается около передней кромки пластины.

Так как в случае решения уравнений Прандтля давление не пересчитывалось и считалось постоянным, то выводить его поле не имеет смысла. Выведем поле давления в случае решения уравнений Навье-Стокса, а также историю сходимости:

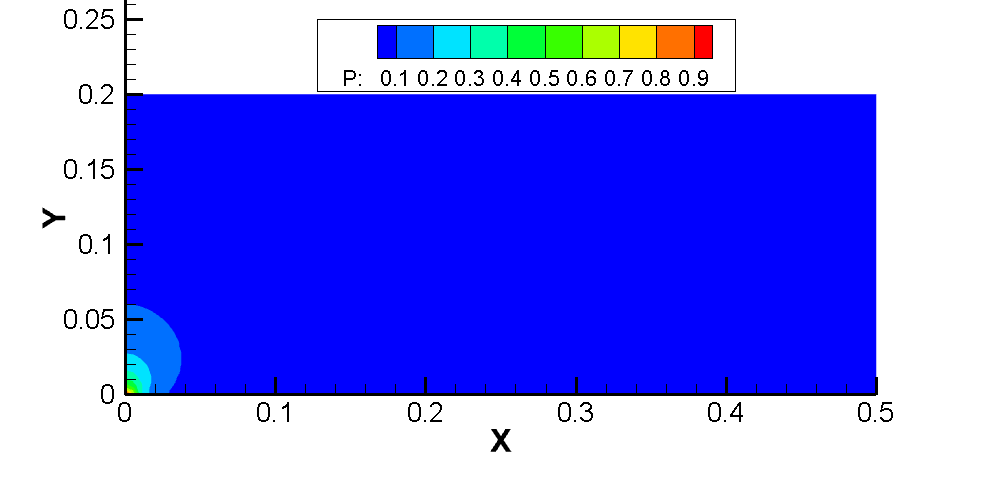


Рисунок . Поле давления. Уравнения Навье-Стокса

Рассмотрим историю сходимости численного решения уравнения Навье-Стокса, а именно – невязки для продольной и поперечной компонент скорости, а также давления. Величины невязок будем определять следующим образом:

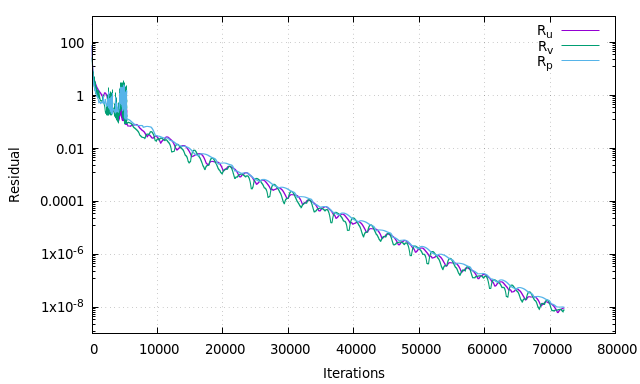


Рисунок . История сходимости. Уравнения Навье-Стокса

Из рисунка видно, что решение постепенно сходится к требуемому значению точности (в данном случае ) примерно за 70000 итераций.

Можем рассчитать коэффициент трения на пластине следующим образом:

Аппроксимируем производную следующим образом:

Получаем:

В случае ур-ий Прандтля:

В случае ур-ий Навье-Стокса:

Проведем сравнение зависимостей коэффициентов трения на стенке от числа Рейнольдса для решения уравнения Прандтля и Навье-Стокса с теоретическим решением, полученным по формуле Блазиуса:

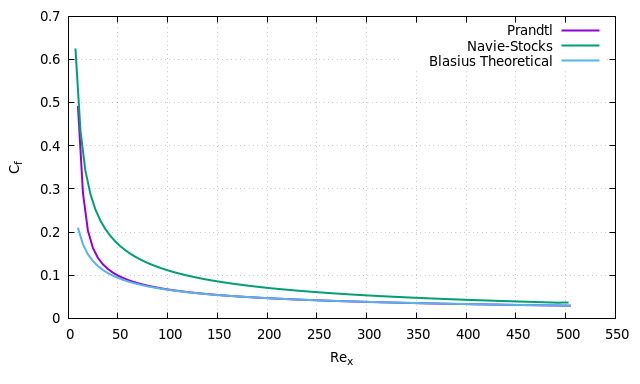


Рисунок 9. Зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса.

На рисунке 9 видно, что коэффициенты трения, полученные при решении уравнения Прандтля и уравнения Навье-Стокса приближаются друг к другу при увеличении числа Рейнольдса. Но коэффициент трения, полученный при решении уравнения Прандтля, почти совпадает с аналитическим решением, это объясняется тем, что формула Блазиуса выводится при аналитическом решении уравнения Прандтля.

Для обоих решений построим также профили продольной компоненты скорости в трех разных сечениях: x = 0.1, 0.2, 0.5 м:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| *А)* | *Б)* | *В)* |

Рисунок 10. Профили скорости при x = 0.1 (А), x = 0.2 (Б), x = 0.5 (В)

Профили, полученные с помощью разных решений, отличаются, но по мере продвижения вдоль стенки это отличие уменьшается. При решении уравнений Навье-Стокса возникает область увеличенных скоростей, чего не наблюдается при решении уравнений Прандтля.

Также на рисунке 11 изображен график зависимости безразмерной скорости к безразмерной координате , откуда видно, что оба решения имеют автомодельное решение и сохраняют его по всей длине пластины.

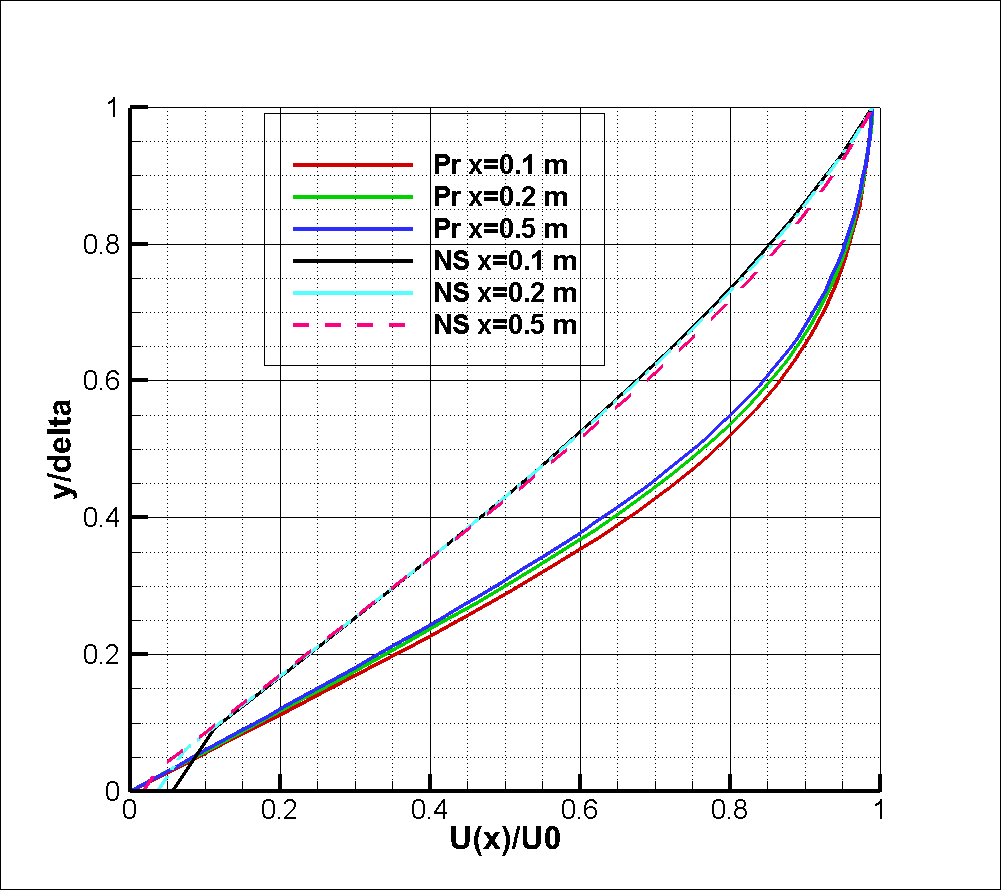


Рисунок 11.Профиль скорости в пограничном слое в автомодельных координатах

**2. Индивидуальный вариант задания**

Рассмотрим течение сжимаемой жидкости с переменной вязкостью, зависящей от координаты по закону , в начальном участке плоского канала.

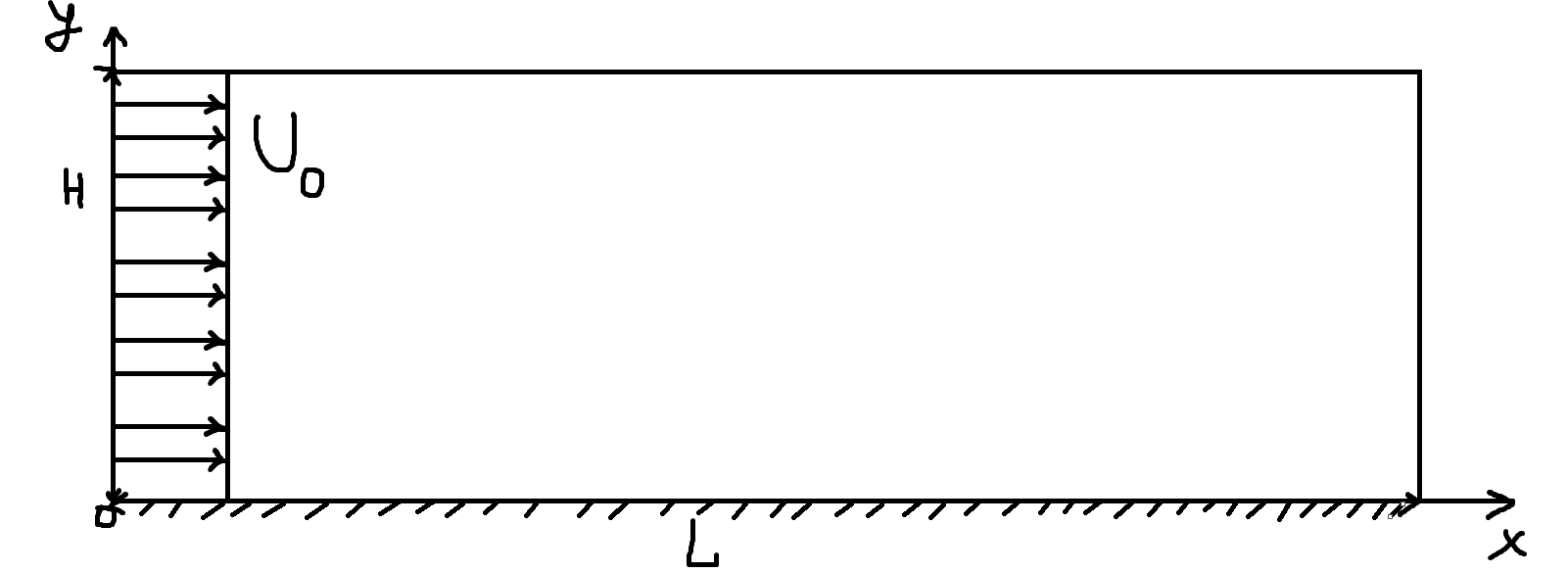


Рисунок 12.Расчетная область.

**2.1 Описание математической модели**

Так как в нашей задаче рассматривается дозвуковое течение сжимаемого газа, то необходимо рассмотреть условие баротропности (). Уравнения Навье-Стокса для вязкого сжимаемого газа будут выглядеть следующим образом:

При решении задачи о течении газа в плоском канале с помощью уравнений Навье-Стокса используются следующие ГУ ( – высота расчетной области, L – длина канала, – давление на выходе):

**2.2 Описание численных методов**

Данная задача описывается системой:

Здесь аналогично тому, как это было при рассмотрении задачи об обтекании пластины рассчитываются скорости переноса и значения параметров на границах ячеек. К соотношениям добавляется только расчёт плотности через давления:

Аппроксимация смешанных производных выглядит следующим образом:

Аппроксимация конвективных слагаемых:

Аппроксимация переменных на гранях ячейки:

Аппроксимация вязких слагаемых:

Аппроксимация граничных условий:

**2.3 Анализ результатов**

Задачу о течении в начальном участке плоского канала будем решать со следующими входными размерными параметрами (Таблица 2):

Таблица Входные параметры

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0.5 | 1 | 1 | 1.28 |  | 51 | 51 | 0.1 | 1 атм | 10 | 1.4 |

Построим график зависимости коэффициента трения на стенке канала от локального числа Рейнольдса, для случая постоянной вязкости и сравним этот график с аналитическим решением. (Рисунок 13).

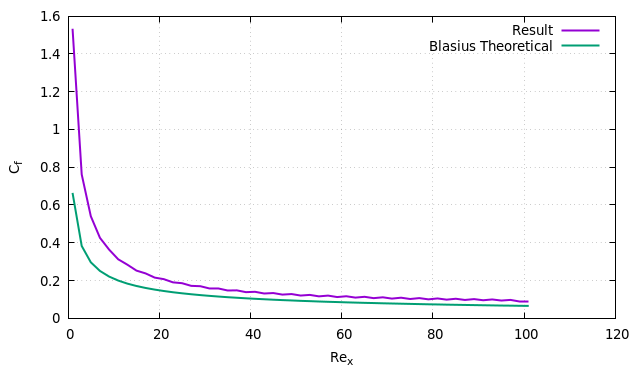


Рисунок 13 Коэффициент трения от локального числа Рейнольдса.

Как мы можем наблюдать, расчеты очень хорошо согласуются с теорией, хотя и отличаются в самом начале потока.

Проведем расчеты при различных значения числа k=0; 0.5; 1; 10. Представим поля скорости, плотности и давления для различных чисел параметра k.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| А) k=10 | Б) k=1 |
|  |  |
| В) k=0.5 | Г) k=0 |

Рисунок 14 Распределение продольной скорости для различных чисел k.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| А) k=10 | Б) k=1 |
|  |  |
| В) k=0.5 | Г) k=0 |

Рисунок 15 Распределение давления для различных чисел k.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| А) k=10 | Б) k=1 |
|  |  |
| В) k=0.5 | Г) k=0 |

Рисунок 16 Распределение плотности для различных чисел k.

Также рассмотрим профили компонент скорости в четырех сечениях начального участка плоского канала: x=0.1, 0.3, 0.6, 0.9 м. (Рисунок 17, 18)

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| А) x=0.1 м | Б) x=0.3 м |
|  |  |
| В) x=0.6 м | Г) x=0.9 м |

Рисунок 17 Профиль продольной скорости в различных сечениях.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| А) x=0.1 м | Б) x=0.3 м |
|  |  |
| В) x=0.6 м | Г) x=0.9 м |

Рисунок 18 Профиль поперечной скорости в различных сечениях.

Как мы можем видеть, что с увеличением числа k вязкость ближе к пластине становится больше, а значит и толщина пограничного слоя увеличивается, что мы и видим на Рисунке 17.

Проведем исследование сеточной сходимости для нашей расчетной области. Варианты сеток: 11x11, 22x22, 51x51, 101x101, 151x151. Рассмотрим профиль продольной скорости в сечении x=1 м, чтобы определить момент, когда решение будет сходиться. (Рисунок 19)

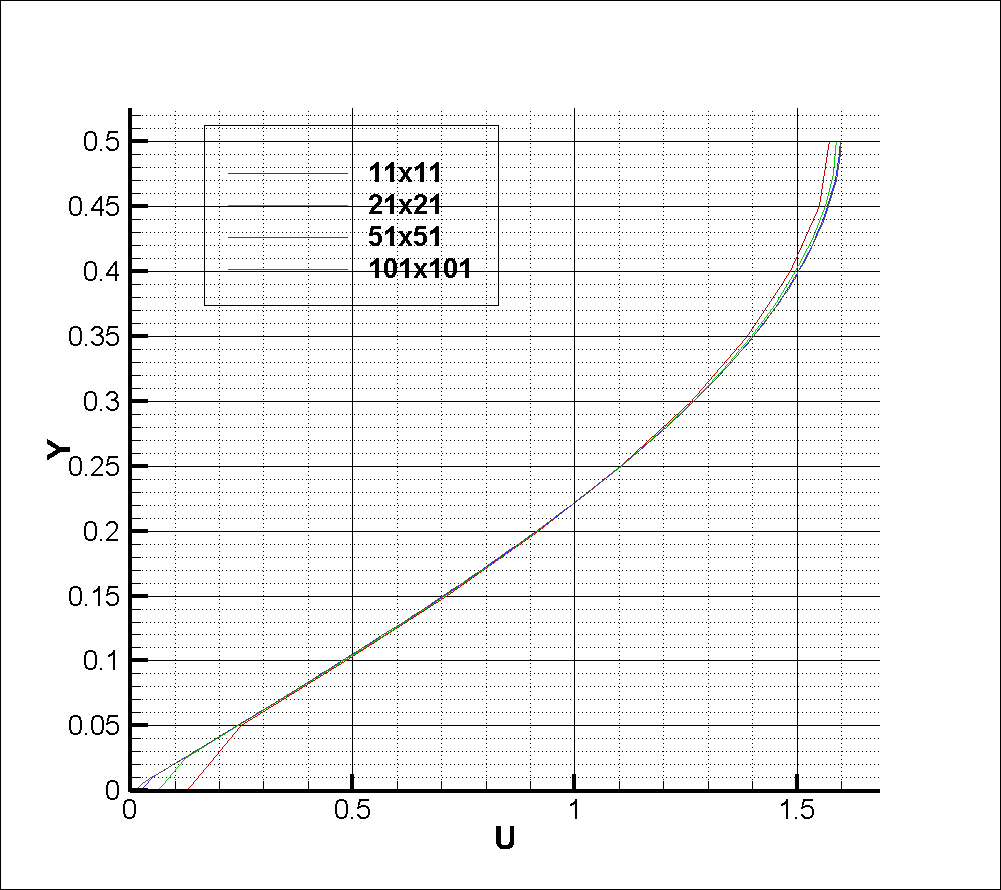


Рисунок 19 Профиль скорости при сеточной сходимости.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вид сетки | Скорость на оси канала, , м/с | Отличие от самой мелкой сетки, |
| 11x11 | 1.57321 | 2.6 |
| 21x21 | 1.58902 | 0.6 |
| 51x51 | 1.59645 | 0.2 |
| 101x101 | 1.59857 |  |

То есть, мы можем сделать вывод о том, что исследование при размере сетки 51x51 является оптимальным для нашей задачи.

**3 Вывод**

Была разработана программа, в которой реализован расчет двумерного тече- ния жидкости с использованием двух моделей описания физических процессов – приближение пограничного слоя (решение уравнений Прандтля) и решение пол- ных уравнений Навье-Стокса.

Для решения уравнений Прандтля произведено сравнение с аналитическм ре- шением для коэффициента трения на поверхности пластины. Численное решение хорошо совпало с аналитическим, что говорит о правильности работы программы.

Изучение истории сходимости показало, что численное решение уравнений Прандтля требует значительно меньшее число итераций, чем численное решение системы уравнений Навье-Стокса. Это является, пожалуй, главным достоинством приближения пограничного слоя: иметь возможность получить удовлетворительное решение за наименьшее количество итераций.

Помимо решения задачи обтекания плоской пластины рассмотрена задача о течении сжимаемой жидкости в плоском канале постоянного сечения с переменной вязкостью. Были проанализированы поля скорости и давления, а также параметрическое исследование влияния параметра k на решение. Также проведено исследование сеточной сходимости, которое показало, что решение с измельчением расчетной сетки довольно быстро сходится.